积分变换

Fourier变换

-求出函数的Fourier变换及Fourier变换的应用

P1.Fourier积分

(1)Fourier级数展开式

设$f_T(t)$以T为周期且在$-\frac{T}{2},\frac{T}{2}$上满足Dirichlet条件(狄利克雷条件:信号存在傅里叶变换的**充分不必要**条件,一周期内绝对可积,连续或只有有限个第一类间断点,有限个极值)

则$f_T(t)$在$-\frac{T}{2},\frac{T}{2}$上可以展成Fourier级数

在$f_T(t)$的连续点处

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\ n\omega t+b_n sin\ n\omega t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{j\omega n^t}$$

我们可以根据三角函数及级数及自然常数对其定义

$$\omega=\frac{2\pi}{T},w_n=n\omega,c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\ e^{-jn\omega t}dt(n=0,\pm 1,\dots),c_0=\frac{a_0}{2},c_n=\frac{a_0-jb_n}{2},c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}(n=1,2,\dots)$$

在$f_T(t)$的间断点t处,其上面的展开式左侧的$f_T(t)$应该以$\frac{1}{2}[f_T(t+0)+f_T(t-0)]$代替下来

(2)Fourier积分定理

对于$(+\infty,-\infty)$上任何的非周期函数$f(t)$均可看作某个周期函数$f_T(t)$当$T\rightarrow+\infty$时转换的

根据这些,我们可以得到一个关于非周期函数的Fourier积分公式

当然,有前提条件

1.$f(t)$在任意区间满足狄利克雷条件

2.$f(t)$在无限区间上绝对可积

当这些条件满足时

在$f(t)$的连续点处有这样的Fourier积分公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\pi)e^{-j\omega T}d\pi e^{j\omega t}d\omega$$

而在其间断点t处,将上文公式的"$f(t)$"用"$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$"代替下来即可

(3)Fourier积分公式的其它形式

用上欧拉公式(Euler's Formula(采样方式(bushi))),欸嘿,三角形式就出来了

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\pi)cos\ \omega(t-\pi)d\pi d\omega$$

那当其为奇函数之时,我们利用三角函数的喝茶(bushi)和差公式来推是可以推正弦积分公式的

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}f(\pi)sin\ \omega\pi d\pi\sin\ \omega\pi d\omega$$

如果其为偶函数时,也是用和差公式可知

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}f(\pi)cos\ \omega\pi d\pi\cos\ \omega\pi d\omega$$

我们管这个叫余弦积分公式

欸 假如$f(t)$仅仅在$(0,+\infty)$这个区间上存在定义 咋办捏

看它满不满足Fourier收敛定理咯

用延拓法,得到$f(t)$的Fourier的正弦/余弦积分公式形式

P2.Fourier变换

(1)概念

一般形式:

$$F[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t) = F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega}d\omega$$

正弦变换:(奇)

$$F_s[f(t)] = F_s(\omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t)sin\ \omega tdt$$

$$f(t) = F_s^{-1}[f(\omega)] = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F_s(\omega)sin\ \omega td\omega$$

余弦变换:(偶)

$$F_c[f(t)] = F_c(\omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t)cos\ \omega tdt$$

$$f(t) = F_c^{-1}[F_c(\omega)] = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F_c(\omega)cos\ \omega td\omega$$

(2)单位脉冲函数及Fourier变换

筛选性:若$f(t)$为无穷次可微的函数,则

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt, f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt$$